I.N.A. & E.N.S.A. MATIERE A OPTION (Option générale) 1984

MATHEMATIQUES (3 h)

Soit r un entier naturel supérieur ou égal à 2.

On note $\mathfrak{J}_r$ l'ensemble des entiers naturels $\{1, 2, \ldots, r\}$.

On considère l'ensemble $\mathcal{E}_r$ des matrices carrées d'ordre r, $M = (a_{ij})$ (i indice de ligne, j indice de colonne) ayant la propriété suivante :

$$\begin{cases} \forall (i, j) \in \mathfrak{J}_r^2 \qquad a_{ij} \in [0,1] \\ \text{et} \\ \forall i \in \mathfrak{J}_r \quad \sum_{j=1}^{r} a_{ij} = 1 \end{cases}$$

Si M est un élément de $\mathcal{E}_r$, on pose : $\forall n \in \mathbb{N}^* \qquad M^{n+1} = M^n \times M$

et $\quad M^n = (P_{ij}^{(n)})$; on a donc : $P_{ij}^{(1)} = a_{ij}$.

Si pour tout $(i, j) \in \mathfrak{J}_r^2$, $P_{ij}^{(n)}$ a une limite finie quand n tend vers $+\infty$, on dira que M^n a une limite et on notera :

$$M^\infty = \lim_{n \to +\infty} M^n .$$

La première partie est l'étude de quelques propriétés des éléments de $\mathcal{E}_r$.

Dans la deuxième partie, on étudie deux exemples.

PREMIERE PARTIE

Soit M un élément de $\mathcal{E}_r$.

A. 1° Exprimer $P_{ij}^{(n+1)}$ à l'aide de $P_{i1}^{(n)}, \ldots, P_{ir}^{(n)}$ et des coefficients de M.

2° Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^* \qquad M^n \in \mathcal{E}_r$.

3° Montrer que si M^∞ existe, alors $M^\infty \in \mathcal{E}_r$ et $M^\infty M = MM^\infty = M^\infty$.

B. 1° En écrivant $M^{n+1} = M \times M^n$, calculer $P_{ij}^{(n+1)}$ en fonction des a_{ij} et des éléments de M^n et montrer que $P_{ij}^{(n+1)}$ peut être considéré comme un barycentre.

On suppose désormais dans cette question B. que :

$\exists \varepsilon > 0, \quad \forall (i, j) \in \mathfrak{J}_r^2 \qquad a_{ij} \geqslant \varepsilon$.

2° On considère la $j^{ème}$ colonne de M^n.

On pose $\alpha_j^{(n)} = \inf_{i \in \mathfrak{J}_r} P_{ij}^{(n)}$, $\beta_j^{(n)} = \sup_{i \in \mathfrak{J}_r} P_{ij}^{(n)}$

et $\quad d_j^{(n)} = \beta_j^{(n)} - \alpha_j^{(n)}$.

a. En minorant $P_{ij}^{(n+1)} - \alpha_j^{(n)}$ et $\beta_j^{(n)} - P_{ij}^{(n+1)}$ $(i \in \mathfrak{J}_r)$,

montrer que :

$$\alpha_j^{(n)} \leqslant \alpha_j^{(n+1)} \leqslant \beta_j^{(n+1)} \leqslant \beta_j^{(n)}$$

et que :

$$d_j^{(n+1)} \leqslant d_j^{(n)} (1 - 2\varepsilon) .$$

b. Quelle est la limite de $d_j^{(n)}$ quand n tend vers $+\infty$?

3° Montrer que M^n a une limite quand n tend vers $+\infty$. Comparer les lignes de M^∞.

C. M est à nouveau un élément quelconque de $\mathcal{E}_r$.

A M, on associe l'endomorphisme φ de $\mathbb{C}^r$ (espace vectoriel sur $\mathbb{C}$ muni de sa base canonique).

1° Montrer que 1 est valeur propre de φ. Montrer que le sous-espace propre associé à 1 contient une direction fixe indépendante de la matrice M choisie dans $\mathcal{E}_r$. Préciser cette direction.

2° Soit λ une valeur propre complexe et soit $x = (x_1, x_2, \ldots, x_r)$ un vecteur propre associé à λ. On désigne par R le plus grand module des composantes de x : $R = \sup_{i \in \mathfrak{J}_r} |x_i|$.

a. Montrer que $|\lambda| \leqslant 1$.

b. Soit λ une valeur propre complexe de module 1, $\lambda \neq 1$. Dans un plan euclidien orienté, on désigne par m_i le point d'affixe x_i. Il existe au moins un élément k de $\mathfrak{J}_r$ tel que $|x_k| = R$.

Soit C le cercle de centre O et de rayon R.

Où sont situés les points m_i par rapport à C ? Le point d'affixe λx_k ?

En interprétant géométriquement la relation : .../...

$$a_{k1}x_1 + \ldots + a_{kr}x_r = \lambda x_k$$

Montrer que :

$$\exists\, j \in \mathfrak{I}_r, \quad j \neq k \quad x_j = \lambda x_k$$

En déduire qu'il existe un entier naturel s, $s \neq 0$ et $s \leqslant r$ tel que $\lambda^s = 1$.

DEUXIEME PARTIE

On considère r états $E_1, E_2, \ldots, E_r$.

Un système évolue dans le temps de manière aléatoire. L'ensemble des dates est $\mathbb{N}$. A chaque date n, le système est dans l'un et l'un seulement des états $E_1, E_2, \ldots E_r$. On fait l'hypothèse (H) suivante : l'état du système à l'instant $n + 1$ ne dépend que de son état à la date n, et ceci quel que soit n.

A tout instant, on note a_{ij} la probabilité pour que le système soit dans l'état E_j à la date $n + 1$, sachant qu'il est dans l'état E_i à la date n, et on note M la matrice (a_{ij}).

D'après l'hypothèse (H), a_{ij} ne dépend pas de n.

A. 1° Vérifier que M est élément de $\mathfrak{S}_r$.

2° On suppose qu'à la date 0, le système est dans l'état E_i. Vérifier que la probabilité pour qu'à la date 2 le système soit dans l'état E_j est $P_{ij}^{(2)}$ et que la probabilité pour qu'il soit à la date n dans l'état E_j est $P_{ij}^{(n)}$.

$P_{ij}^{(n)}$ est aussi la probabilité pour que le système soit dans l'état E_j à la date $k + n$ sachant qu'il était dans l'état E_i à la date k. Pourquoi?

B. On considère un système pouvant évoluer entre trois états E_1, E_2 et E_3 et dont la loi d'évolution est définie par la matrice :

$$M = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

1° Déterminer les valeurs propres de M et vérifier qu'elles satisfont aux résultats trouvés dans la question C de la première partie.

2° Les éléments de M étant tous strictement positifs, l'étude du B de la première partie permet de prévoir l'existence et la forme de M^∞.

Déterminer M^∞.

3° Donner une interprétation de M^∞.

C. On considère un autre système pouvant évoluer entre trois états E_1, E_2 et E_3 et dont la loi d'évolution est définie par la matrice :

$$M = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1° *a.* Déterminer les valeurs propres de M et vérifier qu'elles satisfont aux résultats trouvés dans la question C de la première partie.

b. Calculer M^n. On pourra remarquer que :

$$M = \frac{1}{2}(I + J) \quad \text{où} \quad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

c. Montrer que M^n a une limite quand n tend vers $+\infty$, et déterminer M^∞. En utilisant la signification de M, montrer qu'on pouvait prévoir l'expression de M^∞.

2° *a.* A l'instant initial, le système est à l'état E_2. Soit X la variable aléatoire désignant le temps mis pour passer de l'état E_2 à l'état E_3.

Quelle est la loi de X?

Quel est le temps moyen pour que le système passe de l'état E_2 à l'état E_3 ?

b. A l'instant initial, le système est à l'état E_1.

Quel est le temps moyen pour que le système passe de l'état E_1 à l'état E_3 ?